Proceedings of IAM, V.1, N.2, 2012, pp.137-144

О РАВНОМЕРНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СЕМЕЙСТВ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЦ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДАНИЕМ*

Ф.Г.Рагимов[1], М.М. Навиди[2]

[1]Институт Механики и Математики НАНА, Баку, Азербайджан
[2]Иранский Исламский Рудбарский Университет «Азад», Рудбар, Иран
e-mail: ragimovf@rambler.ru, navidimahmod@yahoo.com

Резюме. В работе изучаются вопросы о конечности моментов перескока, а также равномерной интегрируемости семейств граничных функционалов, связанных с пересечением нелинейных границ случайным блужданием.

Ключевые слова: случайное блуждание, момент первого выхода, перескок случайного блуждания, равномерная интегрируемость.

AMS Subject Classification: 60G50, 82B41.

1. Введение

Пусть $\xi_n, n \geq 1$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P).

Положим

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad n \geq 1.$$

Рассмотрим семейство моментов первого выхода

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1 : S_n > f_a(n)\}, \tag{1}$$

где $f_a(t), t \geq 0$ - некоторое семейство положительных нелинейных (неслучайных) функций (границ) от растущего параметра $a > 0$. Здесь будем считать, что $\inf\{\varnothing\} = \infty$.

Изучение вопроса о равномерной интегрируемости семейств граничных функционалов, связанных с моментом первого выхода τ_a вида (1) всегда представляет большой теоретической и практический интерес. Исследование в этом направлении имеется в работах [1]-[9].

В настоящей работе изучаются вопросы о конечности моментов перескока $R_a = S_{\tau_a} - f_a(\tau_a)$, а также равномерной интегрируемости

---

* Reported at the seminar of the Institute of Applied Mathematics in 08.05.2012

семейства граничных функционалов, связанных с выходом случайного блуждания S_n за нелинейную границу $f_a(t)$.

Отметим, что подобные задачи при различных предположениях относительно границы $f_a(t)$ изучены в работах [1-9].

2. Условия и формулировка основных результатов

Будем предполагать, что $0 < \mu = E\xi_1 < \infty$ и для нелинейной границы $f_a(t)$ выполняются следующие условия регулярности:

1) Для каждого a функция $f_a(t)$ является выпуклой вниз и непрерывно-дифференцируемой, причем $f_a(1) \uparrow \infty$ при $a \to \infty$ и $f_a^{'}(t) \geq 0$ для всех $t > 0$.

2) Для каждого a функция $\dfrac{f_a(t)}{t}$ монотонно убывает к нулью при $t \to \infty$.

Обозначим через $N_a = N_a(\mu)$ решение уравнения $f_a(n) = n\mu$ относительно n, которое существует и единственно в силу сделанных допущений.

Положим

$$\xi^+ = \max(0, \xi) \text{ и } \xi^- = \max(0, -\xi).$$

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. Пусть выполняются вышеперечисленные условия относительно границы $f_a(t)$ и распределения случайных величин ξ_n, $n \geq 1$.

1) Если $E\left(\xi_1^-\right)^r < \infty$ для некоторого $r \geq 1$, то существует число $a_0 > 0$, такое, что семейство $\left\{\left(\dfrac{\tau_a}{N_a}\right)^r,\ a \geq a_0\right\}$ равномерно интегрируемо.

2) Если $E\left(\xi_1^+\right)^r < \infty$ для некоторого $r \geq 1$, то существует число $a_0^{'} > 0$, такое что, семейство

$$\left\{\left(\frac{\xi_{\tau_a}}{(N_a)^{1/r}}\right)^r,\ a \geq a_0^{'}\right\}$$

равномерно интегрируемо.

3) Если $E|\xi_1|^r < \infty$ для некоторого $r \geq 1$, то существует число $a_0^{''} > 0$, такое что, семейство

$$\left\{\left(\frac{S_{\tau_a}}{N_a}\right)^r,\ a \geq a_0^{''}\right\}$$

равномерно интегрируемо.

Теорема 2. Пусть выполняются вышеперечисленные условия относительно границы $f_a(t)$ и распределения случайных величин ξ_n, $n \geq 1$.

Предположим, что $E\left(\xi_1^+\right)^r < \infty$ для некоторого $r > 1$ и $f_a'(N_a) \to \theta \in [0, \mu)$ при $a \to \infty$.

Тогда

1) $ER_a^r < \infty$ для всех $a > 0$;

2) $\dfrac{R_a}{(N_a)^{1/r}} \xrightarrow{п.н.} 0$ при $a \to \infty$;

3) семейство $\left\{ \left(\dfrac{R_a}{(N_a)^{1/r}} \right)^r,\ a \geq a_0 \right\}$ равномерно интегрируема для некоторого $a_0 \geq 1$.

Из теоремы 2 вытекает следующий результат.

Следствие. В условиях теоремы 2 имеет место при $r \geq 1$ $E(R_a)^r = o(N_a)$ при $a \to \infty$.

3. Доказательство основных результатов

Для доказательство теорем 1 и 2 нам понадобятся следующие факты, сформулированные в виде лемм.

Обозначим

$$\nu_a = \inf\{n \geq 1 : S_n > a\}$$

линейный момент первого выхода случайного блуждания S_n за уровень $a > 0$.

Лемма 1. Пусть $E\left(\xi_1^-\right)^r < \infty$ для некоторого $r \geq 1$. Тогда семейство

$$\left\{ \left(\frac{\nu_a}{a} \right)^r, a \geq 1 \right\}$$

равномерно интегрируемо.

Лемма 2. Пусть X_n, $n \geq 1$ и Y_n, $n \geq 1$ - последовательности положительных случайных величин, такие, что для некоторого $r > 0$ семейства

$$\left\{X_n^r,\ n \geq 1\right\} \text{ и } \left\{Y_n^r,\ n \geq 1\right\}$$

являются равномерно интегрируемыми. Тогда семейство

$$\left\{(X_n + Y_n)^r,\ n \geq 1\right\}$$

также является равномерно интегрируемым.

Лемма 3. Пусть $X_n \xrightarrow{P} X$ и семейство $\{|X_n|^r,\ n \ge 1\}$ равномерно интегрируемо для некоторого $r > 0$. Тогда

$$E|X_n|^s \to E|X|^s \text{ при } n \to \infty$$

для всех $s,\ 0 < s \le r$.

Эти леммы доказаны в работе [4].

Лемма 4. Пусть $(\xi_1^+)^r < \infty$ для некоторого $r \ge 1$. Тогда

$$\frac{\xi_{\tau_a}}{(N_a)^{1/r}} \xrightarrow{п.н} 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Утверждение этой леммы следует из работы [6].

Доказательство теоремы 1. Для доказательства утверждения 1) рассмотрим следующий момент первого выхода

$$T_a^{(1)} = \inf\{n \ge 1 : S_n > f_a(N_a) + f_a^{'}(N_a)(n - N_a)\}.$$

Ясно, что учитывая $f_a(N) = \mu N_a$ можно написать

$$T_a^{(1)} = \inf\{n \ge 1 : S_n^{(1)} > N_a\}, \tag{1}$$

где

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(1)} \text{ и } \xi_k^{(1)} = \frac{\xi_k - f_a^{'}(N_a)}{\mu - f_a^{'}(N_a)}.$$

Ясно, что $E\xi_k^{(1)} = 1$ и шаг $\xi_k^{(1)}$ случайного блуждания $S_n^{(1)},\ n \ge 1$ зависит от параметра a. Линейная граница $y(t) = f_a(N_a) + f_a^{'}(N_a)(t - N_a)$ как функция от t является касательной к нелинейной границе $f_a(t)$ в точке $(N_a, f_a(N_a))$.

Поскольку граница $f_a(t)$ является выпуклой вниз (вогнутой), то имеем

$$\tau_a \le T_a^{(1)}. \tag{2}$$

Далее, рассмотрим случайные величины

$$\xi_k^{(2)} = \frac{\xi_k - (\varepsilon + \theta)}{\mu - (\theta - \varepsilon)},\ k = 1,2,...,\ 0 < \varepsilon < \mu - \theta$$

и случайное блуждание

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(2)},$$

шаг $\xi_k^{(2)}$ которого не зависит от параметра a.

Рассмотрим линейный момент первого выхода

$$T_a^{(2)} = \inf\{n \ge 1 : \quad S_n^{(2)} > N_a\}.$$

Из условия $f_a^{'}(N_a) \to \theta \in [0, \mu)$ при $a \to \infty$ следует, что существует число $a_1 > 0$, такое, что для $a > a_1$ выполняется

$$0 \le f_a^{'}(N_a) < \mu .$$

Кроме того, для любого $0 < \varepsilon < \mu - \theta$ существует число $a_2 \geq a_1$, такое, что для $a \geq a_2$ имеет место

$$\theta - \varepsilon < f_a'(N_a) < \theta + \varepsilon .$$

Поэтому для $a \geq a_2$ имеем

$$\xi_k^{(2)} \leq \xi_k^{(1)}.$$

Следовательно

$$T_k^{(1)} \leq T_a^{(2)} \text{ при } a \geq a_2 .$$

Тогда из (2) вытекает, что для $a \geq a_2$

$$\tau_a \leq T_a^{(2)}. \tag{3}$$

Согласно лемме 1 семейство

$$\left(\frac{T_a^{(2)}}{N_a}\right)^r, \ a \geq a_2$$

равномерно интегрируемо. Поэтому в силу (3) семейство

$$\left(\frac{\tau_a}{N_a}\right)^r, \ a \geq a_2$$

также является равномерно интегрируемым. Таким образом, утверждение 1) теоремы 1 выполняется с $a_0 = a_2$.

Докажем утверждение 2 теоремы 1. По определению величины τ_a и в силу монотонности границы $f_a(t)$ имеем

$$\begin{aligned} 0 < S_{\tau_a} - f_a(\tau_a) \leq S_{\tau_a} - f_a(\tau_a - 1) \leq \\ \leq S_{\tau_a} - S_{\tau_a - 1} = \xi_{\tau_a} \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) следует, что

$$\xi_{\tau_a} = \xi_{\tau_a}^+ .$$

Тогда ясно, что

$$\xi_{\tau_a}^r \leq \left(\xi_1^+\right)^r + \ldots + \left(\xi_{\tau_a}^+\right)^r \tag{5}$$

В силу работы [5] $E\tau_a < \infty$ для каждого $a > 0$, поскольку $E|\xi_1| < \infty$. С помощью тождества Вальда из (5) получаем

$$E\xi_{\tau_a}^r \leq E\tau_a \cdot E\left(\xi_1^+\right)^r$$

или

$$E\left(\frac{\xi_{\tau_a}^r}{N_a}\right) \leq E\left(\frac{\tau_a}{N_a}\right) E\left(\xi_1^+\right)^r . \tag{6}$$

Из утверждения 1) при $r = 1$ вытекает, что семейство $\frac{\tau_a}{N_a},\ a \ge a_0$ равномерно интегрируемо. Поэтому утверждение 2) доказываемой теоремы следует из (6).

Докажем утверждение 3). Из сделанных силу допущений относительно границы $f_a(t)$ вытекает, что существуют числа $\delta \in (0, \mu)$ и c_0, такие, что

$$f_a(t) \le c_0 + \delta t,\ t > 0. \tag{7}$$

Из (4) вытекает, что

$$f_a(\tau_a) < S_{\tau_a} \le f_a(\tau_a - 1) + \xi_{\tau_a}.$$

Отсюда, в силу (7) получаем

$$S_{\tau_a} \le c_0 + \delta(\tau_a - 1) + \xi_{\tau_a} \le c_0 + \delta\tau_a + \xi_{\tau_a}. \tag{8}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{S_{\tau_a}}{N_a} \le \frac{c_0}{N_a} + \delta\frac{\tau_a}{N_a} + \frac{\xi_{\tau_a}}{N_a} \le \\ &\le \frac{c_0}{N_a} + \delta\frac{\tau_a}{N_a} + \frac{\xi_{\tau_a}}{(N_a)^{1/r}} \end{aligned} \tag{9}$$

так как $N_a \to \infty$ при $a \to \infty$ и $r \ge 1$.

Из условия $E|\xi_1|^r < \infty$ следует, что в силу утверждений 1) и 2) семейства

$$\left(\frac{\tau_a}{N_a}\right)^r,\ a \ge a_0$$

и

$$\left(\frac{\xi_{\tau_a}}{(N_a)^{1/r}}\right)^r,\ a \ge a_0$$

равномерно интегрируемыми.

Тогда утверждение 3) теоремы 1 вытекает из леммы 2 и оценки (9).

Доказательство теоремы 2. Из (4) следует, что

$$0 \le R_a = S_{\tau_a} - f_a(\tau_a) \le \xi_{\tau_a}.$$

Тогда для $r \ge 1$

$$ER_a^r \le E\xi_{\tau_a}^r. \tag{10}$$

Из (6) вытекает, что

$$E\xi_{\tau_a}^r < \infty$$

для всех $a > 0$. Поэтому утверждение 1) теоремы 2 следует из (10).

Утверждение 2) следует из оценки $R_a \le \xi_{\tau_a}$ и леммы 4, а утверждение 3) вытекает из утверждения 2 теоремы 1.

Отметим, что утверждение следствия вытекает, согласно лемме 3, из утверждений 2) и 3) теоремы 2.

Литература

1. Новиков А.А. О времени пересечения односторонней нелинейной границы суммами независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, № 4, с.643-656.
2. Рагимов Ф.Г. О равномерной интегрируемости семейства моментов первого выхода случайного блуждания за нелинейную границу, Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2005, № 2, с.46-53.
3. Gut A. On the moments and limit distributions of some first passage times, Ann. Probab., 1974, 2, pp.277-308.
4. Gut A. Stopped Random Walks. Limit Theorems and Applications, Springer, 1988.
5. Hashimova T.E. On finiteness of the moments of intersection time of one-sided nonlinear boundary by a random walk, Transactions of NAS of Azerbaijan, 2010, vol.XXX, N.1, pp.69-72.
6. Hashimova T.E. On the strong law for the first crossing time of nonlinear boundaries by random walk, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2011, vol. XXXIV(XLII), pp.45-50.
7. Siegmund D. Some one-sided stopping rules, Ann. Math. Stotist., 1967, 38, pp.1641-1646.
8. Siegmund D. Sequential Analysis. Test and confidence Intervals, Springer, 1985.
9. Woodroofe M. Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis, SIAM, 1982.

Təsadüfi dolaşmalı qeyri-xətti sərhədlərin kəsişməsi ilə bağlı sərhəd funksionalları ailəsinin müntəzəm inteqrallanması haqqında

F.H. Rəhimov, M.M. Navidi

XÜLASƏ

İşdə sıçrama momenti haqqında məsələlər, habelə təsadüfi dolaşmalı qeyri-xətti sərhədlərin kəsişməsi ilə bağlı sərhəd funksionalları ailəsinin müntəzəm kəsilməzliyi öyrənilir.

Açar sözlər: təsadüfi dolaşma, ilk çıxış anı, təsadüfi dolaşmanın keçidi, müntəzəm inteqrallanma.

On an uniform integrity of the family of some boundary functionals related with the intersection of the nonlinear boundaries by random

F.G. Ragimov, M.M. Navidi

ABSTRACT

In the work the problem of finites of the across moments and uniform integrity of the family of boundary functionals related with the intersection the nonlinear boundary by random walk.

Keywords: random walk, the first cross moment, random walk jump, uniform integrity.